

# UNA APLICACIÓN CURIOSA DEL HECHO QUE LA DIMENSIÓN DEL ESPACIO ES TRES

---

EL PRESENTE ARTÍCULO PRETENDE ILUSTRAR AL LECTOR COMO EN LA FÍSICA ACTUAL SE USA EL CONCEPTO DE DIMENSIÓN. LA PRIMERA PREGUNTA QUE SURGE ES EL POR QUÉ LA DIMENSIÓN DEL ESPACIO EN QUE VIVIMOS ES PRECISAMENTE TRES Y NO OTRA. ESTO PUEDE PARECER PARADÓJICO Y APARENTEMENTE NO TENEMOS ARGUMENTOS PARA EXPLICAR ESTE HECHO, SENCILLAMENTE ¡ES ASÍ! LA CONEXIÓN DE ESTA PREGUNTA CON EL CONTROVERTIDO PRINCIPIO ANTRÓPICO SE EXAMINA EN LA PRIMERA PARTE. PERO TAMBIÉN EL HECHO DE QUE LA DIMENSIÓN DEL ESPACIO ES TRES PERMITE DESARROLLAR UN MÉTODO DE CÁLCULO SORPRENDEMENTE SIMPLE LLAMADO *MÉTODO 1/d*, PARA OBTENER LAS PROPIEDADES DE SISTEMAS FÍSICOS EN DONDE LA APLICACIÓN DE LOS MÉTODOS MÁS GENERALES RESULTA DEMASIADO COMPLEJO.

---

Por: **Augusto González, Boris A. Rodríguez**  
*Departamento de Física,*  
*Universidad Nacional, Sede Medellín*



A pesar de que pueda parecer paradójica la pregunta acerca de la dimensión del espacio, desde la física nos podemos aproximar a esta cuestión usando una idea bastante interesante: como no podemos demostrar que la dimensión del espacio físico es tres, intentemos mostrar que si el espacio tuviera una dimensión distinta el comportamiento de los objetos del universo sería radicalmente diferente. Por ejemplo, podemos escribir las leyes físicas que conocemos en una dimensión distinta a tres, e intentar encontrar algo que no funcione bien.

El primer cuestionamiento acerca de la importancia de que la dimensión de nuestro espacio sea precisamente tres es debida al físico alemán Paul Ehrenfest, quien razonó de la siguiente forma: consideremos un átomo de Hidrógeno en un espacio de dimensión  $d$  arbitraria. Si llamamos  $l$  al momento angular del electrón y  $r$  a la distancia de éste con el núcleo, la energía clásica total del electrón en el átomo la podemos escribir como:

$$E(r) = I^2/(2r^2) + \phi(r) \quad (1)$$

en donde  $I^2/(2r^2)$  es la energía cinética del electrón en una órbita de radio  $r$  y  $\phi(r)$  es la energía de interacción con el núcleo, que es debida a las fuerza de atracción electrostática entre el electrón y el núcleo. Esta energía de interacción toma distintas formas dependiendo de la dimensión del espacio, así en una dimensión ( $d=1$ )

$$\phi = r \phi = \ln r \text{ en } d = 2, \text{ y}$$

$$\phi = -1/r^{d-2} \text{ en } d \geq 3.$$

Si graficamos la energía total del electrón para distintas dimensiones, podemos observar el siguiente hecho: *La energía del electrón  $E(r)$  no posee un mínimo estable cuando la dimensión del espacio es mayor o igual a cuatro ( $d \geq 4$ ).* En la figura 1 se muestran los casos  $d=3$  y  $d > 4$ . Esta última observación arroja consecuencias bastante importantes. Si no existe un mínimo estable en la energía del electrón, éste no puede permanecer ligado al núcleo del átomo porque, o bien colapsa acercándose al centro, o bien se aleja indefinidamente. En la figura 1B, es como si el electrón se «deslizara» por las «laderas» de la curva de energía.

Esto implica que el átomo no podría mantenerse estable, es decir que la materia no tendría la diversidad de estructuras que podemos ver, y en particular no se crearían estructuras biológicas como los seres humanos. En conclusión, si la dimensión de nuestro espacio fuera  $d_{\text{esp}} \geq 4$ , el mundo no sería tal y como lo vemos e incluso ¡no existiría el género humano!

Esta idea que hemos aplicado a la dimensión del espacio puede extenderse a otros parámetros de las teorías

físicas. Así por ejemplo, se podría preguntar cuál sería el cuadro del mundo si otras constantes físicas fundamentales como la carga del electrón, la masa de las partículas elementales, etc. tuvieran valores distintos a los que medimos actualmente. La respuesta a esta pregunta es muchas veces parecida a la que obtuvimos en el caso anterior: *a veces pequeños cambios en los valores de los parámetros dan lugar a un cuadro muy distinto del mundo que observamos.* La exigencia de que los parámetros y las teorías físicas deben ser tales que conduzcan al Universo que observamos ha sido elevado al rango de principio: el controvertido *Principio Antrópico*, y ha probado ser de utilidad en la Teoría de la Evolución del Universo.

### LA DIMENSIÓN Y EL MÉTODO 1/D

Otro contexto en donde puede utilizarse el concepto de dimensión, es mostrar cómo la dimensión del espacio,  $d_{\text{esp}} = 3$ , para algunos propósitos puede considerarse «suficientemente grande». En efecto este «curioso» hecho permite en algunos casos simplificar de una forma sorprendente el cálculo de propiedades de sistemas cuánticos de tres y más partículas<sup>1</sup>.

Consideremos la energía del estado base<sup>2</sup> de un sistema de dos partículas idénticas, dos átomos por ejemplo, a la que denominaremos  $E_2$ . La magnitud correspondiente en el sistema de tres partículas será denominada  $E_3$ . La energía potencial de interacción entre dos partículas cualesquiera la podemos escribir en la forma  $gV(r)$ , donde  $r$  es la distancia entre ellas y la constante  $g$  se ha separado de la energía potencial por conveniencia. Si calculamos estas magnitudes de acuerdo con las leyes de la Mecánica

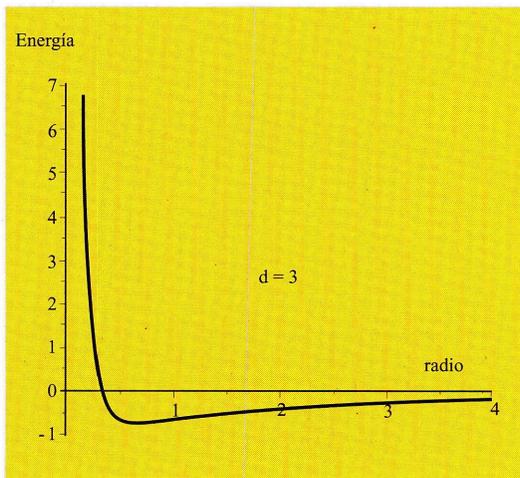


Fig. 1. ENERGÍA DE UN ELECTRON EN UN CAMPO COULOMBIANO COMO FUNCIÓN DEL RADIO DE LA ÓRBITA.

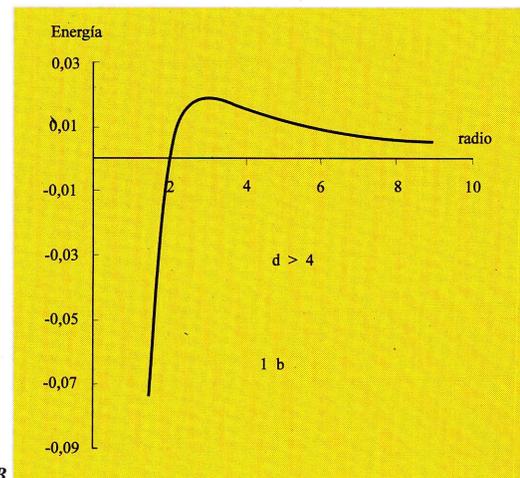


Fig. 1B

Cuántica en un espacio de dimensión  $d$  arbitraria podemos hacer la gráfica del cociente  $E_3(g) / (2 E_2(3g/2))$  vs  $1/d$ , en donde a diferencia del análisis anterior de Ehrenfest no modificaremos la energía potencial cuando pasemos a  $d$  dimensiones. El resultado se muestra en la figura 2. La dependencia, como se ve, es muy suave y en el límite de dimensión infinita  $d \rightarrow \infty$ , límite que hay que tomar con cierto cuidado, ¡el cociente es igual a 1 independientemente de cual sea la energía de interacción!

Este resultado nos sugiere hacer lo siguiente para el cálculo de  $E_3$ . Si la dimensión del espacio fuera «muy grande», es decir que está lo bastante cerca de  $1/d = 0$  (note que esto es lo mismo que decir que  $d \rightarrow \infty$ ), como la curva no se separa mucho del valor que toma en este punto<sup>3</sup>, podemos en primera aproximación decir que el cociente de energías  $E_3(g) \approx (2E_2(3g/2))$  es igual a 1. Esto significa que podemos calcular la energía del sistema de 3 partículas,  $E_3(g)$ , como dos veces la energía del sistema de dos partículas, que como ya hemos visto es un problema mucho más simple, con una energía de interacción modificada por una constante  $3g/2$ , es decir:

$$E_3(g) \approx 2E_2(3g/2). \quad (2)$$

Si queremos incluir en la anterior ecuación las correcciones que den cuenta del 10% que se ha olvidado, podemos transformar (2) en

$$E_3(g) = 2C_3E_2(3g/2), \quad (3)$$

donde la magnitud  $C_3$  tiene una expresión simple en potencias de:  $1/d$ :  $C_3 = 1 + a_3/d + \dots$  y el coeficiente  $a_3$  puede calcularse analíticamente. La generalización al caso de  $N$  partículas idénticas también es posible:

$$E_N(g) = (N-1)C_N E_2(Ng/2), \quad (4)$$

y muestra ser extraordinariamente efectiva en una amplia gama de problemas. Como antes,

$$C_N = 1 + a_N/d + \dots$$

En la figura 3 mostramos la aplicación de (4) a  $N$  partículas que interactúan con un potencial  $V(r) = -1/r$ .

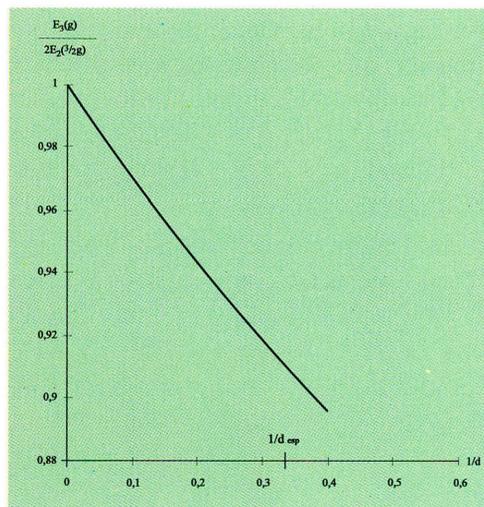


Fig. 2. COCIENTE DE ENERGÍAS VS INVERSO DE LA DIMENSIÓN ESPACIAL.

- (1) Uno de los grandes problemas de las teorías físicas fundamentales es que sólo pueden describir exactamente sistemas de una o dos partículas. Cuando el sistema es más complicado, generalmente de tres o más cuerpos, las ecuaciones son o muy difíciles de solucionar o no existe solución analítica alguna. Es por esto que el desarrollo de métodos para abordar el problema de tres o más cuerpos es muy importante en la física actual.
- (2) La energía del estado base es la mínima energía que puede tener un sistema según las leyes de la mecánica cuántica.
- (3) Observe que la diferencia de la curva en  $1/d=0$  y en  $1/d_{exp} = 1/3$  es de aproximadamente un 10%.
- (4) J.L. Basdevant et al, Nuclear Physics B 340 (1990), pp. 60-69.

Este problema está conectado con la pregunta acerca de la estabilidad de la materia cuando consideramos su propia atracción gravitacional. El coeficiente  $a_N$  es calculado y los resultados son comparados con los cálculos numéricos de Basdevant et al.<sup>4</sup> para  $N = 3$  y  $Nd \rightarrow \infty$ . La coincidencia es sorprendentemente buena, al punto de que la diferencia entre ambos resultados no sobrepasa el 0.5% del total. El esfuerzo desplegado en el cómputo es en nuestro caso insignificante, a diferencia de los cálculos numéricos que, para tres o más partículas, son complicados y consumen gran cantidad de tiempo.

Este método, con algunas modificaciones, puede aplicarse en diversos dominios de la física. Particularmente exitoso ha resultado en problemas de átomos con pocos electrones. En adelante mostraremos un conjunto de aplicaciones a trampas de electrones, energías y radios de hadrones, clusters atómicos y excitones en un campo magnético.

Las trampas de átomos e iones son dispositivos en los que por medios electromagnéticos se logra confinar en un espacio reducido a un conjunto de estas partículas, e

parabólica, es decir, donde la energía potencial que confina los electrones en la trampa depende del cuadrado de la distancia y es independiente de la dirección espacial. El parámetro  $a$  indica cuan fuerte es el confinamiento. Los resultados del método  $1/d$  se comparan con cálculos numéricos en la aproximación de Thomas-Fermi mejorada. Vemos que variando el parámetro  $a$  en nueve órdenes de magnitud ambos estimados no se apartan más del 4%, lo cual indica que el método  $1/d$  es capaz de captar la física del problema.

En las dos siguientes gráficas mostramos resultados del método  $1/d$  aplicado a la física de partículas hadrónicas, entendidos como sistemas de quarks. Un barión, en cuya categoría entran el protón, el neutrón y otros, se compone de tres quarks, mientras que un mesón, el más conocido de los cuales es el  $\pi$ , se compone de un quark y un antiquark. En cierta aproximación podemos modelar los quarks como partículas no relativistas interaccionando entre sí con un potencial  $gV(r)$ . En la figura 5 se presentan cocientes de masas (energías) entre bariones y mesones. En el eje horizontal se han dispuesto los distintos casos. Por ejemplo, con dos quarks  $s$  y uno  $c$  se forma el barión

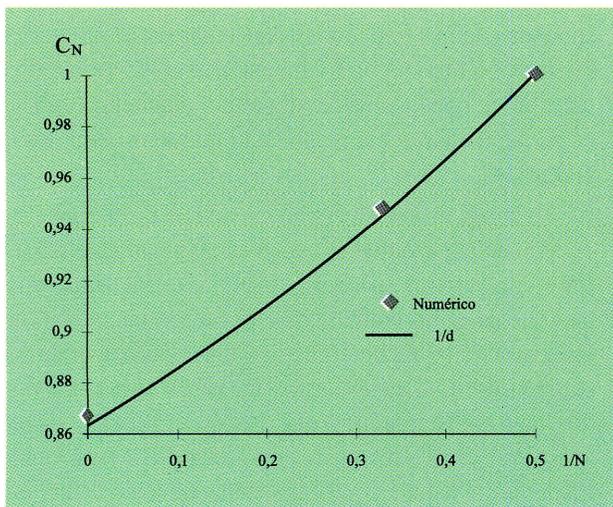


Fig. 3. COEFICIENTE  $C_N$  DEL SISTEMA DE  $N$  PARTÍCULAS CON UN POTENCIAL GRAVITATORIO ATRACTIVO.

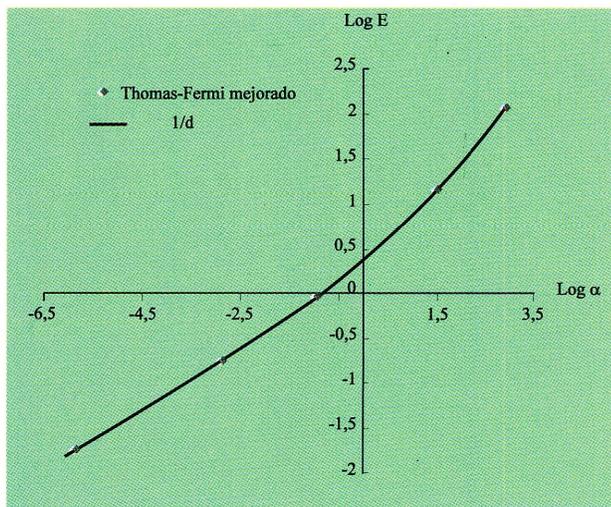


Fig. 4. ENERGÍA DE 19 ELECTRONES EN UNA TRAMPA PARABÓLICA.

incluso a una sola, permitiendo mediciones muy precisas de magnitudes físicas fundamentales. Por trabajos pioneros en esta dirección fue concedido en 1989 el premio Nobel de Física a Dehmelt, Paul y Ramsey.

En la figura 4 mostramos el cálculo de la energía del estado base de un sistema de 19 electrones en una trampa

denominado  $\Omega_c$ , con un quark  $c$  y  $s$  un (anti  $s$ ) se forma el mesón  $D_s$  y con un  $s$  y un  $s$  el  $\phi$ . En la figura aparecerá el cociente  $M(\Omega_c) / (M(D_s) + 3M(\phi) / 2)$ . Los resultados del método  $1/d$  se comparan con los datos experimentales. La concordancia, como se observa, es muy buena, con un error menor que el 1%.

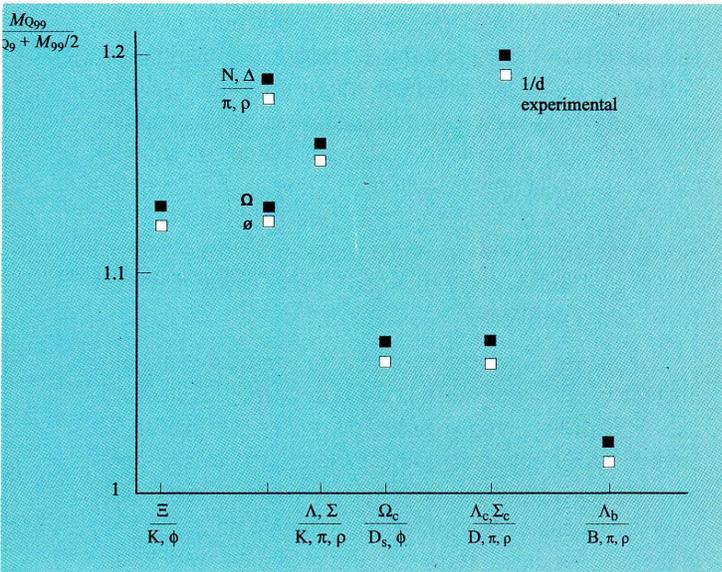


Fig. 5. COCIENTES DE MASA DE BARIONES Y MESONES.

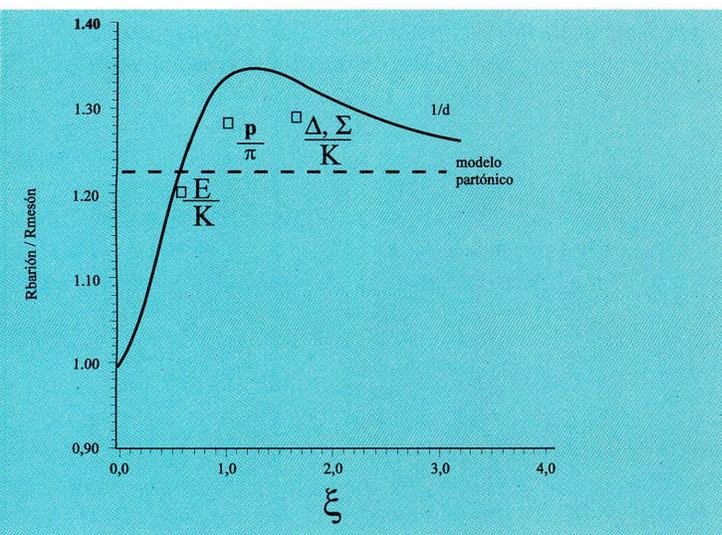


Fig. 6. COCIENTES DE RADIOS DE BARIONES Y MESONES.

Resultados análogos se pueden obtener para los cocientes entre los radios (tamaños) del barión y el mesón,  $R_{Qq} / R_{qQ}$ . En la figura 6 se muestran estos cocientes como función de la variable  $\xi = m_Q / m_q$ . La línea continua representa nuestros cálculos analíticos mientras que los cuadros representan resultados extraídos del experimento. La diferencia es del orden del 15%. Desafortunadamente, no existen mediciones que nos permitan hacer comparaciones en la región  $\xi \ll 1$ , en la cual nuestros cálculos difieren notablemente de uno de los modelos de

la física de partículas elementales: el modelo partónico intuitivo (señalado en el gráfico con una línea de puntos). Anotemos que en este caso nuestro estimado se hizo utilizando la aproximación más baja, es decir como si para el coeficiente  $C_N$  hubiéramos utilizado el valor 1. De aquí que el error sea del 15%.

El siguiente ejemplo proviene de la Física Atómica y se refiere a conglomerados (clusters) de átomos de gases inertes. En la gráfica 7 mostramos la energía básica de  $N$  átomos de Neón, donde  $N$  recorre los valores de 3 a 13. La energía potencial con la que interactúan los átomos, en unidades adimensionales, es lo que se conoce como el potencial de Lennard-Jones 6-12, que tiene la forma:

$$V(r) = 4 (r^{-12} - r^{-6}) \quad (5)$$

Nuestro estimado según la ecuación (4) se compara con los resultados numéricos por el método de Monte Carlo de D. Leiter et al.<sup>5</sup>, siendo la concordancia muy buena, con un error menor que el 4%.

Por último analicemos el ejemplo del excitón en un campo magnético. El excitón es el análogo del átomo de Hidrógeno en la física del Estado Sólido. Es decir, esta compuesto de un electrón y un hueco interactuando electromagnéticamente según la ley de Coulomb. Podemos suponer además que ambas partículas están obligadas a moverse en una región bidimensional como resultado de estar en un pozo cuántico. El campo magnético aplicado es perpendicular a ese plano en el que se mueven los excitones.

En la figura 8 se muestran los niveles de energía de un excitón en el caso que el hueco es infinitamente masivo. En el eje vertical aparece la energía normalizada mientras que en el horizontal corre el campo magnético normalizado de tal manera que el valor 1 corresponde a un campo infinito. Las líneas continuas son nuestros estimados analíticos mientras que las discontinuas (cuando aparecen) son los resultados numéricos de Mac Donald<sup>6</sup>. La denominación  $s, p, d, f$  sigue un convenio de la Física Atómica y corresponde a valores del momento angular  $l = 0, 1, 2, 3$ . Los signos indican si el momento angular está orientado a favor o en contra del campo magnético. Vemos que, también en este caso, la concordancia entre ambos resultados es excelente.

(5) D. Leiter et al., *Journal of Chemical Physics* 94 (1991), pp. 35.

(6) A Mac Donald et al., *Physical Review B* 33 (1986), pp. 8336.

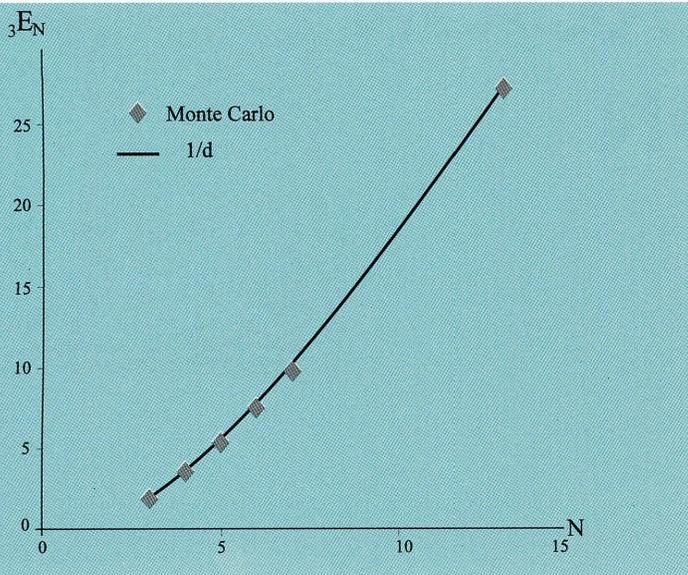


FIG. 7. ENERGÍA DEL ESTADO BASE PARA N ÁTOMOS DE NEÓN.

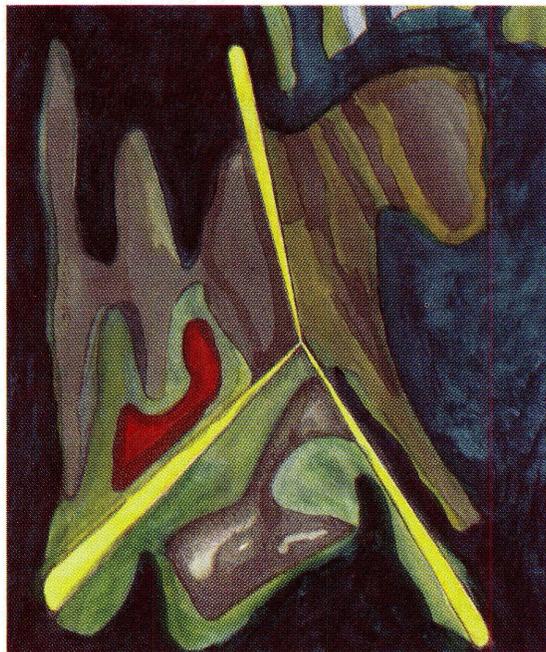


Ilustración: Carlos Roberto Franco

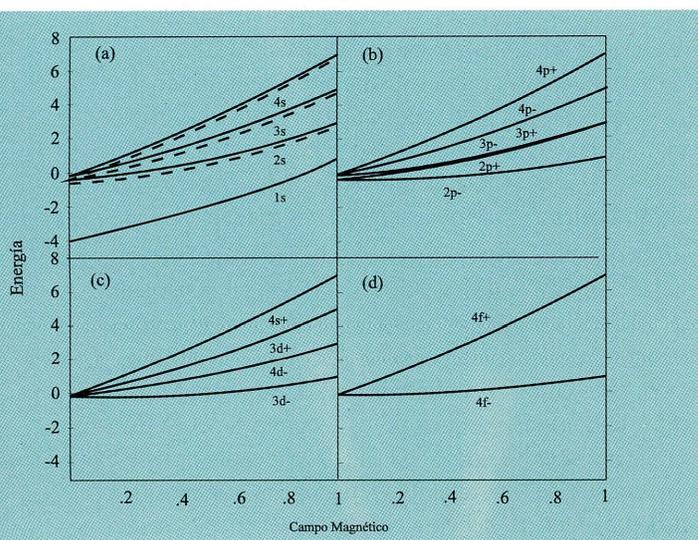


FIG. 8. NIVELES DE ENERGÍA DE UN EXCITÓN EN FUNCIÓN DEL CAMPO MAGNÉTICO.



## BIBLIOGRAFÍA

- J.L. BASDEVANT et al, *Nuclear Physics B* 340 (1990), pp. 60-69.D.
- LEITER ET AL, *Journal of Chemical Physics* 94 (1991), pp. 35.
- A. MAC DONALD et al, *Physical Review B* 33 (1986), pp. 8336.

## CONCLUSIONES

Con todos estos ejemplos hemos querido ilustrar cómo el análisis de una pregunta aparentemente paradójica le permite a la física desarrollar un conjunto de ideas o métodos bastante sugestivos. En particular se ilustraron las enormes posibilidades que ofrece el método  $1/d$  para estimar analíticamente, aunque de forma aproximada, magnitudes físicas de sistemas en los cuales el tratamiento matemático es muy complejo. Como se mencionó, la idea básica está contenida en la figura 2 y puede resumirse como que la dimensión de nuestro espacio,  $d_{esp} = 3$ , está «suficientemente cerca» de  $d = \infty$ , al menos para este conjunto de problemas. Otros problemas interesantes están siendo tratados por este método en nuestro grupo. Uno de los grandes problemas de las teorías físicas fundamentales es que sólo pueden describir exactamente sistemas de una o dos partículas. Cuando el sistema es más complicado, generalmente de tres o más cuerpos, las ecuaciones son o muy difíciles de solucionar o no existe solución analítica alguna. Es por esto que el desarrollo de métodos para abordar el problema de tres o más cuerpos es muy importante en la física actual. La energía del estado base es la mínima energía que puede tener un sistema según las leyes de la mecánica cuántica. Observe que la diferencia de la curva en  $y$  en  $d_{esp}$  es de aproximadamente un 10%.&