Boletín No. 31. 1991 Museo del Oro

Los Grupos de Simetría y la Arqueología

Por: **Víctor S. Albis**
Matemático y Profesor
Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad Nacional de Colombia

La Arqueología estudia, entre otras cosas, testimonios y monumentos de las civilizaciones antiguas; clasifica objetos para determinar cronologías y entender pensamientos. Desde la década del 80, un grupo de arqueólogos ha comenzado a trabajar en un nuevo método para clasificar objetos y utensilios ornamentados: los grupos de simetría

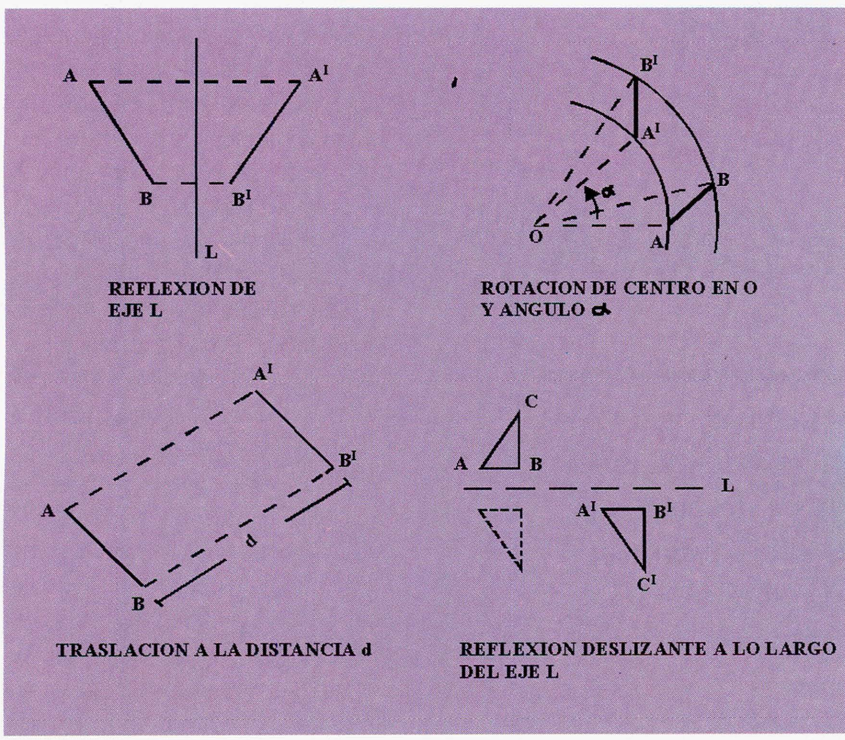
Varias veces, en la Universidad Nacional de Colombia, hemos diseñado y enseñado un curso de matemáticas especiales para antropólogos, que contiene entre otros temas, el de las simetrías planas. De hecho, los grupos de simetría de los diseños que ornamentan la cerámica, la cestería, la orfebrería o los tejidos de una cultura, proporcionan *un criterio de clasificación arqueológica*, independiente de los motivos figurativos y otros criterios morfológicos o descriptivos usados comúnmente por los arqueólogos y los historiadores del arte primitivo. Por ejemplo, es posible determinar con ayuda de estos grupos (conjuntamente con otros criterios) los grados de comunicación entre diferentes comunidades o rastrear rutas de intercambio cultural. O bien, como lo hemos hecho con la cerámica de la región Central de Panamá, validar o invalidar la verosimilitud y conveniencia de las divisiones en períodos estilísticos hechas mediante otros criterios de clasificación, con el beneficio adicional de *descubrir y confirmar la existencia de tres subperíodos estilísticos bien diferenciados en el llamado V período*. Naturalmente, debimos partir en este caso de la observación de diferencias estilísticas, por ejemplo, en platos planos o poco profundos de base anular. Es conveniente advertir, sin embargo, que la difícil cuestión de decidir si la subdivisión que propusimos para el período mencionado es cronológica o jerárquica, no encuentra solución en nuestro trabajo.

A pesar de que la utilización de los grupos de simetría como herramienta en arqueología es de reciente data, tiene interesantes y poderosas implicaciones en la continuidad y cambios estructurales del diseño en el tiempo y en el espacio. Quienes los utilicen llegarán por fuerza a la misma clasificación partiendo del mismo cuerpo de datos, alcanzándose así un grado de comparabilidad raras veces logrado con otros instrumentos

El análisis de las simetrías de un diseño, que siempre supondremos colocado sobre un plano parte de que la mayoría de los diseños tiene elementos o motivos que se repiten de manera regular. Los *movimientos* en el plano que permiten repetir sin deformar los elementos o motivos del diseño son precisamente los *movimientos rígidos* o *isometrías*, es decir, aquellos que conservan las distancia entre puntos del plano. Ejemplos de movimientos rígidos son las reflexiones con respecto a un eje, las rotaciones alrededor de un punto, las traslaciones paralelas en la dirección de una recta y las reflexiones deslizantes (véase la figura 1). Por otra parte, un teorema fundamental y de fácil demostración que dice que *todo movimiento rígido en el plano es la composición de una traslación seguida de una rotación o una reflexión*, nos permite restringir nuestro análisis a las cuatro isometrías mencionadas.

Naturalmente, dado el diseño acabado, existe el problema inverso de determinar cuáles fueron los movimientos rígidos que se utilizaron en su elaboración. Para ello basta determinar todos aquellos que transforman el diseño en sí mismo. Se demuestra que este conjunto de movimientos rígidos conforma, para la composición de movimientos, *un grupo matemático*, denominado el *grupo de simetría del diseño*. Para cada diseño este grupo de simetría es un *invariante estructural* y, por supuesto, diseños muy distintos en lo figurativo, por ejemplo, pueden tener el mismo grupo de simetría. Esto permite la *clasificación* de que hemos hablado, definiendo dos diseños como *equivalentes* si tienen el mismo grupo de simetría. El criterio obtenido así adquiere verdaderamente un carácter universal.

La estructura del grupo de simetría de un diseño difiere según en él existan o no traslaciones. En este último caso, el diseño se dice finito y su grupo de simetría es un conjunto finito, llamado *grupo puntual* o de *Leonardo*, que sólo contiene, como elementos, rotaciones y reflexiones. Es notable en este caso la existencia de un punto especial (que puede o no pertenecer al conjunto de los puntos del diseño): el *centro de simetría del diseño*. Los únicos gru-



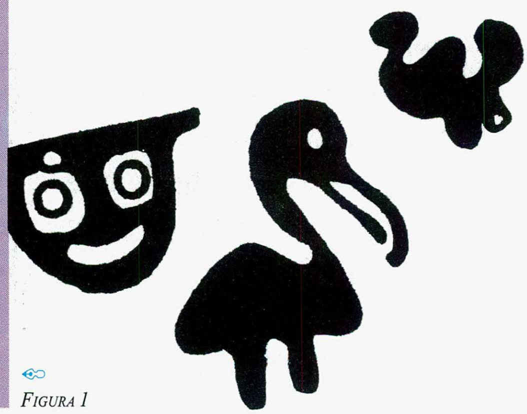


FIGURA 1

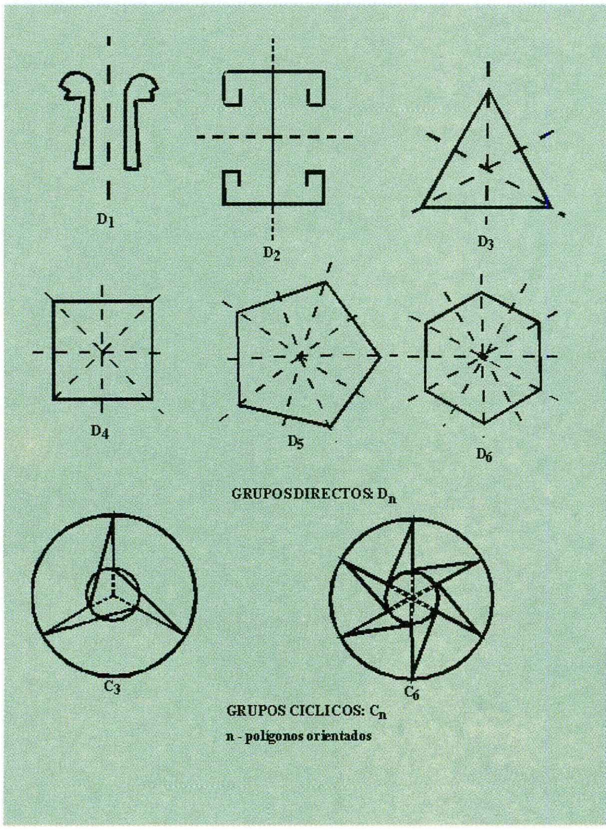
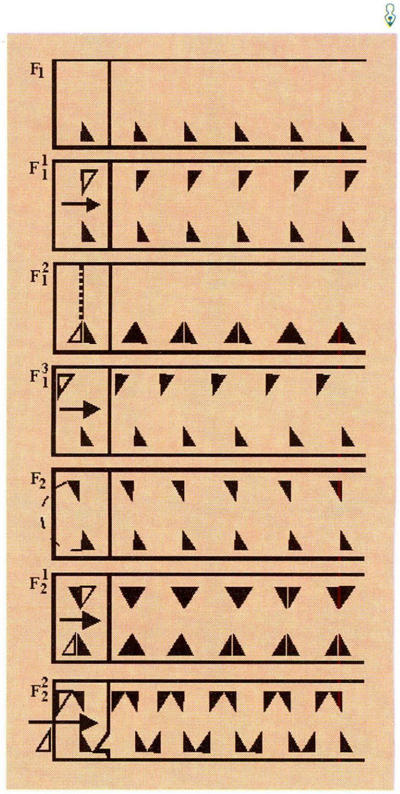


FIGURA 2

Tomado de "El Animal en el Mundo Mitico Tairona"

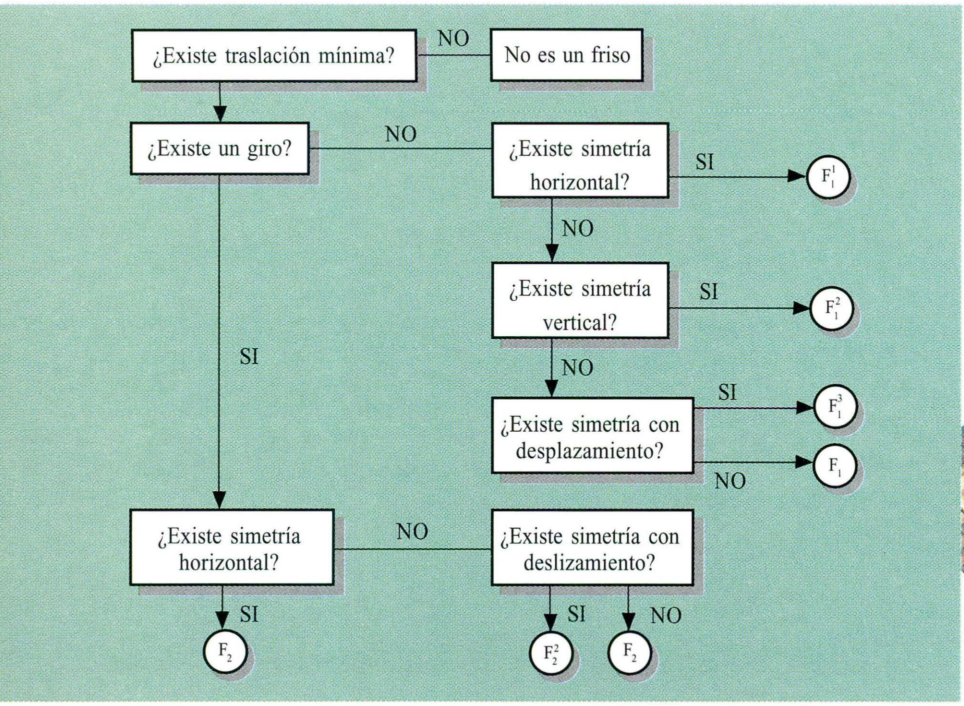
FIGURA 3



pos puntuales son los llamados *grupos diédricos* D2n y los llamados *grupos cíclicos* Cn (n=1,2,...). Los primeros contienen reflexiones cuyos ejes pasan por el centro de simetría del diseño y rotaciones alrededor de este centro. Para n > 3, el grupo cíclico C_n es exactamente el grupo de simetría de un *n-polígono regular orientado* (véase la figura 2, en la cual aparecen algunos diseños finitos con sus respectivos grupos de simetría) y sus únicos elementos son rotaciones alrededor del centro de simetría del diseño.

Si en el grupo de simetría de un diseño hay por lo menos una traslación, decimos que el diseño es infinito. Al contener una traslación, el grupo de simetrías de un diseño *infinito* es siempre un conjunto infinito. Si el grupo de simetría de un diseño infinito admite traslaciones en una sola dirección, decimos que el diseño es *unidimensional*, mientras que si las admite en dos direcciones diferentes, hablamos de diseños *bidimensionales*. Para el análisis de un diseño infinito suponemos siempre que no es limitado, es decir, que se extiende a todo el plano.

Los diseños unidimensionales que se consideran en nuestro análisis son los denominados *frisos*, cuyo común denominador es la repetición de un motivo decorativo a lo largo de una banda rectangular de longitud infinita. Evidentemente la selección del motivo queda a voluntad del diseñador, pero la selección de las simetrías está limitada por la geometría. En efecto, se puede demostrar que solamente hay siete tipos de frisos, (ejemplificados en la figura 3),



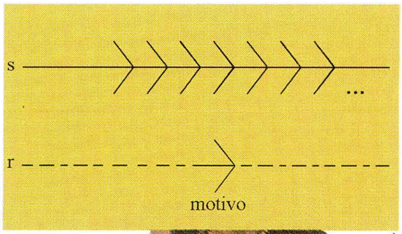


FIGURA 5

FIGURA 4

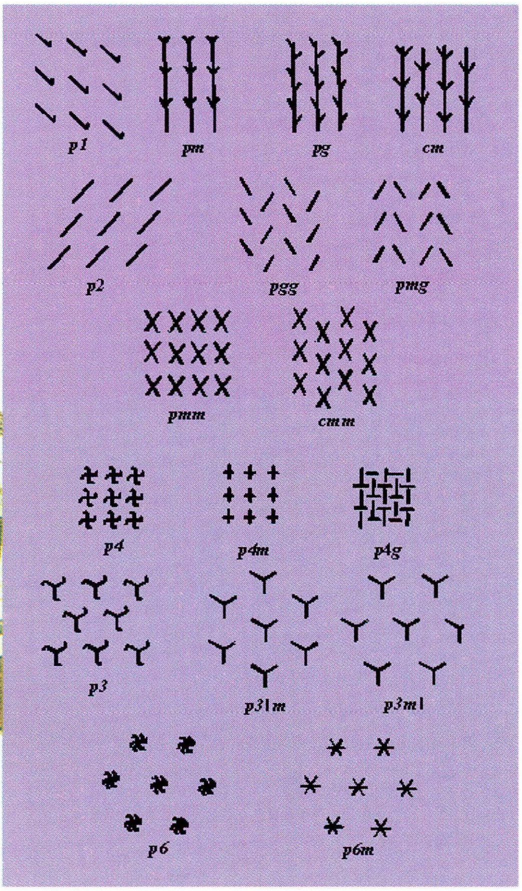


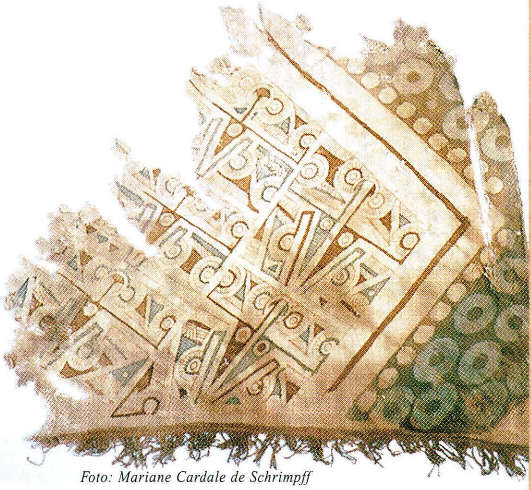
FIGURA 6

LOS DIECISIETE DISEÑOS BIDIMENSIONALES

y que, además, existe un diagrama de flujo (figura 4) que nos permite obtener algorítmicamente el grupo de un friso.

Por ejemplo, en el diseño de la figura 5 (espina de pescado) al aplicar el algoritmo que aparece en la figura 4, vemos inmediatamente que existe una traslación mínima que corre (a la izquierda o a la derecha) el motivo que indicamos por separado en la figura 5. Pero no existe un giro de 180 grados alrededor de ningún punto de la franja que contiene al diseño que pueda transformarlo en sí mismo, porque se cambia la orientación del motivo. Según el algoritmo, debemos preguntarnos en seguida si existe o no una reflexión horizontal que deje invariado el diseño. La respuesta es sí, lo que comprobamos tomando la recta r como eje de la reflexión que ella determina. Luego, finalmente, según el algoritmo el tipo del friso de la figura 5 es F_1^1.

En el caso más complejo de los diseños bidimensionales, se puede demostrar que la elección de las simetrías está limitada a 17 posibilidades o grupos admisibles, los llamados grupos *cristalográficos planos*. En la figura 5, aparecen diseños esquemáticos que corresponden a estos grupos, y en la figura 6, un algoritmo para la determinación del grupo de simetría de un diseño infinito bidimensional.&



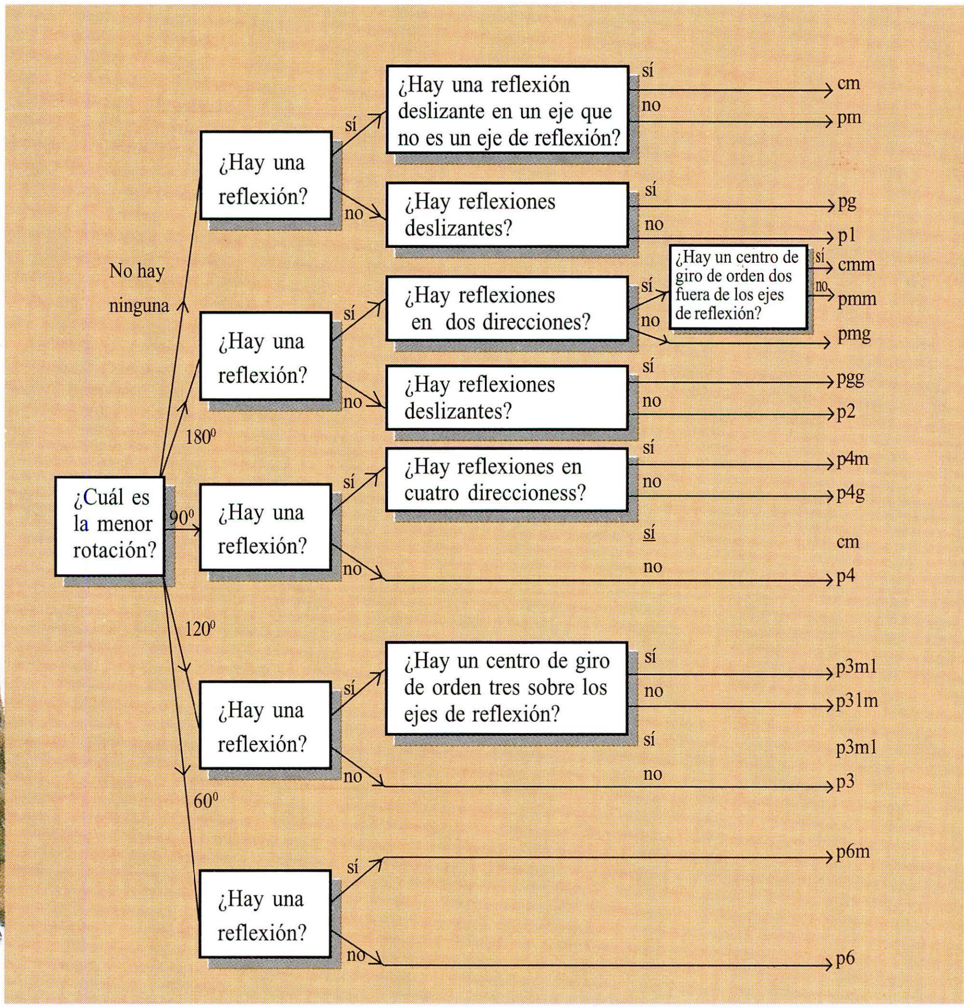


Figura 7

PARA SABER MÁS

- V. Albis, 1984, *Un programa de investigación en la historia de la matemática de un país latinoamericano.* Quipu. Revista Latinoamericana de Historia de las Ciencias y la Tecnología 1, 391-400.
- V. Albis, 1986, *Arte prehispánico y matemáticas*. Revista de la Universidad Nacional de Colombia, 2a. época, II (No. 7), 29-34.
- V. Albis & J.A. Valencia, 1990, *Una aplicación de los grupos de simetría a la confirmación de períodos estilísticos en la cerámica de la región Central de Panamá.* Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, XVII (No. 67), 703-714.
- C. Alsina & E. Trillas, 1984, *Lecciones de álgebra y geometría.* Barcelona: Gustavo Gilli.
- K. Lothrop, 1942, *Coclé, An Archeological Study of Central Panamá.* Part II. The Pottery of Sitio Conte and other Archeological Sites. Memoirs of the Peabody Museum, Vol. VII, Cambridge, Mass: Harvard University Press.
- D.K. Washburn, 1979, *Review of «Pattern Dissemination in the Prehistoric South West and Mesoamerica»*, B. Zaslow & Alfred E. Dittert Jr.,. American Antiquity, 44 (1), 190-192.
- B. Zaslow & A.E. Dittert Jr. 1981, *Pattern Dissemination in the Prehistoric South West and Mesoamerica.* Anthropological Research papers, No 25, tempe, Arizona State University.